



Ein Schwerpunktprogramm  
der  
**DFG**

### Projektleitung

Prof. Dr. Kristina Reiss,  
Lehrstuhl für Didaktik der  
Mathematik,  
Universität Augsburg

Prof. Dr. Alexander Renkl  
Lehrstuhl für Pädagogische  
Psychologie  
Universität Freiburg

### Mitarbeiter/-innen

Dr. Aiso Heinze  
Stephan Kessler  
Sebastian Kuntze  
JeeYi Kwak  
Markus Rechner  
Franziska Rudolph

### Kontakt

Stephan Kessler  
Lehrstuhl für Didaktik der  
Mathematik  
Universität Augsburg  
Universitätsstr. 10  
86135 Augsburg  
[stephan.kessler@math.uni-augsburg.de](mailto:stephan.kessler@math.uni-augsburg.de)  
Tel.: +49 (0) 821 598 5509  
Fax.: +49 (0) 821 598 2278

### Internet

<http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/forschung/biqua/>

## Begründen und Beweisen in der Geometrie

### Bedingungen des Wissensaufbaus bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe

#### Forschungsziele

Das Projekt beschäftigt sich mit der Frage, wie mathematisches Problemlösen im Unterricht, dargestellt am Beispiel des Beweisens und Begründens in der Geometrie, vermittelt werden kann. Sowohl TIMSS und PISA als auch andere Untersuchungen haben gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler auch dann mit Aufgaben zum Argumentieren und Begründen Schwierigkeiten haben, wenn sie über das notwendige Faktenwissen verfügen. Die Untersuchung des Themas erfolgt in verschiedenen, miteinander verknüpften Teilstudien. Im Vordergrund dieser Studien stand zunächst die Bestandsaufnahme sowie die Klärung einzelner Variablen. So beschäftigte sich eine Studie vorrangig mit der Analyse schulischer Bedingungsfaktoren für das Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht. Betrachtet wurden der Einfluss verschiedener Unterrichtsstile sowie der Vorstellungen von Lehrern über den Mathematikunterricht und über den Charakter mathematischer Beweise auf den Wissenserwerb und die Entwicklung mathematischer Weltbilder (*beliefs*). Eine weitere Studie hatte Lösungsprozesse und individuelle Determinanten der Leistung beim Verstehen und bei der Konstruktion geometrischer Beweise zum Gegenstand.

In letzter Zeit ist die Umsetzung in die Praxis in den Fokus unserer Forschungsarbeit gerückt. Es wurden Schüler aktivierende Lernumgebungsmaterialien konzipiert, in ein Unterrichtskonzept integriert und schließlich evaluiert. Dabei spielen auch Aspekte der Lehrerrolle eine wichtige Rolle. Eine spezielle Fragestellung betrifft dabei die Fehlerkultur im Unterrichtsgespräch. In der letzten Projektphase wird es eine Studie geben, bei der verschiedene Fortbildungen von Lehrerinnen und Lehrern durchgeführt und der jeweilige Einfluss auf Unterricht und Schülerleistung betrachtet wird.

#### Theoretischer und methodischer Ansatz

Betrachtet man das Beweisen als prototypisch für einen diskursiven Unterrichtsstil, so kommt diesem Thema eine besondere auch Fach übergreifende Bedeutung zu. Entsprechend wurden im Rahmen des Projekts Unterrichtskonzepte zur Verbesserung der Leistungen bei der Lösung geometrischer Beweisaufgaben entwickelt. Dafür war die Identifizierung von Variablen notwendig, die das Beweisverständnis (und damit eine Methodenkompetenz oberhalb der Ebene einfacher Schlussfolgerungen und Routinen) bei Schülerinnen und Schülern fördern können. Auf dieser Grundlage werden folgende Ziele im Projekt fokussiert:

- (1) eine Beschreibung wesentlicher individueller kognitiver und nicht kognitiver Determinanten der Lösungskompetenz bei Beweisaufgaben,
- (2) eine Erfassung von Unterrichtsvariablen, die für die die Entwicklung des Beweisverständnisses von zentraler Bedeutung sind, sowie
- (3) die Prüfung der Interdependenzen zwischen Unterrichtsvariablen und individuellen Variablen.

Es werden auf Grundlage der obigen Aspekte zum einen inter- als auch intraindividuelle Unterschiede in den Leistungsbildern der Schülerinnen und Schüler erwartet als auch Unterschiede in Hinblick auf die einzelnen Schulklassen, die dann Rückschlüsse auf Bedingungsfaktoren für einen diskursiven Mathematikunterricht zulassen.

In der ersten Projektphase wurden in Gymnasien Erhebungen durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten Aufgaben zu Basis- und Beweiskompetenzen im Bereich des Themenfeldes Geometrie. Zusätzlich wurde überprüft, inwiefern unterschiedliche Variablen (Beweisverständnis, wissenschaftliches Denken, metakognitives Wissen) das Lösungsverhalten der Schüler bestimmen. Mittels einer Lehrerbefragung und Video basierten Unterrichtsbeobachtungen wurden Daten für Unterrichtsvariablen erhoben.

In der zweiten Projektphase wurden die Leistung im Beweisen und Begründen, die Methodenkompetenz, das wissenschaftliche Denken, die allgemeine Argumentationsfähigkeit, Aspekte von Interesse und Motivation sowie die Mathematik bezogenen *beliefs* erfragt. Die Schülerinnen und Schüler lernten in einer von zwei Umgebungen, nämlich mit der eher konstruktivistisch angelegten Themenstudie oder mit den eher instruktional orientierten heuristischen Lösungsbeispielen. Persönliche Variablen und Leistungswerte wurden vor und nach der Intervention erhoben.

Die dritte Projektphase schließt an die vorangegangenen Arbeiten an und stellt eine Erweiterung dar. Die Materialien werden so angepasst, dass sie die Diskussion über Fehler (so wie sie typischerweise auch ein Schüler oder eine Schülerin machen könnte) erzwingen. Eine Intervention wird auf der Ebene des Unterrichts erfolgen und auf der Ebene der Schüler evaluiert werden. Zentral ist dabei die Fortbildung der Lehrerinnen und Lehrer. Ihr Inhalt zeigt zum einen den Umgang mit Fehlern im Unterricht und zum anderen die Möglichkeiten der beiden Lernumgebungen auf.

## Hauptergebnisse

### Erhebung individueller Bedingungsfaktoren und Leistungsvariablen in der Sekundarstufe I

#### (a) Basiskompetenzen, Beweisverständnis und argumentative Kompetenz im Bereich Geometrie

Die Auswertung des Leistungstests zeigt deutliche Unterschiede zwischen Basiskompetenzen und Kompetenzen im Bereich des Argumentierens und Begründens. Zu den Basiskompetenzen gehören hierbei Elemente deklarativen Wissens wie Kenntnisse über Symmetrie oder das Berechnen von Winkeln.

Bei den Aufgaben, die eher Argumentieren bzw. Beweisen verlangen, können zwei Typen unterschieden werden. So werden Aufgaben, bei denen die Argumentation eine einfache Identifizierung und Anwendung gelernter Begriffe verlangt, noch relativ gut gelöst werden. Ein eigenständiges Zusammenfügen verschiedener Fakten in eine Argumentationskette wird hingegen eher nicht geleistet.

In Anlehnung an *die Stufen mathematischer Kompetenz*, die bei der Bearbeitung von PISA-Items in der Sekundarstufe II identifiziert werden konnten, lassen sich in unserer Untersuchung drei Kompetenzstufen benennen. Es zeigt sich hierbei, dass die theoretische Einordnung der Items in Kompetenzstufen durch die empirischen Daten gestützt wird:

- Einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern (Kompetenzstufe I);
- Argumentieren und Begründen, einschrittig (Kompetenzstufe II);
- Argumentieren und Begründen, mehrschrittig (Kompetenzstufe III).

Weiterhin liegen erhebliche Unterschiede zwischen den einzelnen Klassen in Bezug auf den Geometrietest vor.

Die Tests zum Beweisen und Begründen wurden auf der Basis theoretischer Annahmen zu Leistungsstufen in diesem Bereich konzipiert. Sie erwiesen sich als Raschskalierbar.

#### (b) Methodenkompetenz im Bereich des Begründens und Beweizens

Hinsichtlich des Beweisverständnisses hat sich gezeigt, dass es den Schülerinnen und Schülern insbesondere schwer fällt, nicht korrekte Beweise im Vergleich zu korrekten zu evaluieren. Die Beurteilung von Beweisen fällt den Schülerinnen und Schülern deutlich einfacher als das eigenständige Formulieren von Beweisen.

Darüber hinaus zeigen Vergleiche des unteren, mittleren und oberen Leistungsdrittels hochsignifikante Unterschiede in Bezug auf die Methodenkompetenz. Insbesondere gilt, dass eine hohe Methodenkompetenz mit einer hohen Kompetenz im Begründen und Beweisen zusammenhängt. Leistungsschwächere Schüler können ihre Leistung ebenfalls durch die Arbeit mit der Themenstudie verbessern, die ihnen neue Aspekte des Beweizens zeigt.

#### (c) Kompetenzen im Bereich des wissenschaftlichen Denkens

Wie bereits in einigen Studien gezeigt werden konnte, lassen sich Schüler bei der Lösung von Aufgaben zum wissenschaftlichen Denken häufig von inhaltlichen Argumenten leiten, die nicht unbedingt formal-logisch nachvollziehbar sind. Dies konnte auch bei unserer Stichprobe gezeigt werden. So konnten Schülerinnen und Schüler vor allem solche Aufgaben richtig lösen, bei denen die korrekte Lösung auch inhaltlich plausibel war. Ein Großteil der Schülerinnen und Schüler versagte aber bei Aufgaben, bei denen die inhaltliche Plausibilität keine Hilfe darstellte.

Es lässt sich ferner ein deutlicher Einfluss der Fähigkeiten zum wissenschaftlichen Denken auf Leistungen im Bereich des Argumentierens und Begründens erkennen. Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die über formale Strategien im wissenschaftlichen Denken verfügen, haben beim Lösen von Beweisaufgaben weniger Schwierigkeiten.

#### (d) Schülerbeliefs über Mathematik

In der Auswertung der Fragebögen konnten als wesentliche Hauptfaktoren die *beliefs* Anwendung, Exaktheit und Prozess identifiziert werden. Die *beliefs* der Schülerinnen und Schüler zum Mathematikunterricht sind positiv geprägt, wobei die Auffassung, dass Mathematik wesentlich durch Exaktheit bzw. Formalismus geprägt ist, deutlich dominiert. Der Zusammenhang zwischen Schülerleistungen und -beliefs ist – wie schon in TIMSS nachgewiesen – eher gering. Die Ergebnisse von TIMSS legen nahe, dass die *beliefs* über Mediatorvariablen wie Interesse und Motivation auf den Unterricht wirken. Dies soll in der kommenden Antragsphase geprüft werden.

## Erhebung der unterrichtsbezogenen Bedingungsfaktoren

### (a) Lehrerbeliefs über Mathematik

Bei Betrachtung der Mathematik bezogenen *beliefs* der Lehrer der 7./8. Klassen ergeben sich deutliche Unterschiede zu den Schülerbeliefs. Insbesondere wird deutlich, dass Lehrerinnen und Lehrer in den leistungsstärkeren Klassen über ein relativ ausgewogenes Bild von Mathematik verfügen.

### (b) Unterrichtsstil

Eine detaillierte Auswertung des Leistungstests hat gezeigt, dass es hochsignifikante Unterschiede im argumentativen Verhalten zwischen leistungsstärkeren und -schwächeren Klassen gibt. Die Ergebnisse legen nahe, dass es so etwas wie ein diskursives Klassenklima, also auch einen diskursiven Mathematikunterricht, gibt. Klassen, die in dieser Art und Weise Mathematik erfahren, zeigen insbesondere deutlich bessere Leistungen. Erste Video basierte Unterrichtsbeobachtungen bestätigen diesen Eindruck. Es bleibt zu prüfen, welche Variablen zu einem solchen Klassenklima beitragen.

## Durchführung der Interventionsstudie in der Sekundarstufe

Die Erprobung der beiden Lernumgebungen in der 8.Klasse zeigte, dass vor allem die heuristischen Lösungsbeispiele einen bedeutsamen Effekt auf die Beweis Kompetenzen haben. Insbesondere werden auch leistungsschwächere Schüler durch diese Art der Beweiserklärung gefördert. Sie zeigen dabei weniger eine Steigerung von Basiskompetenzen, sondern eine signifikant verbesserte Leistung in Bezug auf das mathematische Beweisen und profitieren so sehr gezielt von der Lernumgebung.

## Bedeutung für die Praxis

Die Unterrichtsmaterialien zu den Lernumgebungen Lösungsbeispiele und Themenstudie sind im Rahmen ei-

ner Einheit zum Beweisen und Begründen in Klasse 8 von Gymnasien oder Realschulen einsetzbar. Beiden Materialien ist gemeinsam, dass sie Schüler aktivierende Arbeitsformen beinhalten und Lehrkräften effektive und ausgereifte Möglichkeiten zur Gestaltung des Unterrichts bieten. Befragungen mit Schülerinnen und Schülern haben gezeigt, dass beide Lernumgebungen als positive Abwechslungen zum alltäglichen Unterricht wahrgenommen werden und motivierend wirken.

Eine praktische Bedeutung hat auch die Adaption der Theorie des Beweisen und Begründens in Anlehnung an Boero für den Schulunterricht. Die Aufschlüsselung der Beweisphasen in eher explorative und eher deduktive Elemente kann unmittelbar auf den Unterricht übertragen werden. Das gilt ganz allgemein für einen argumentationsorientierten Mathematikunterricht in der Mittel- und Oberstufe.

Gleiches gilt für die Analyse zum Umgang mit fehlerhaften Schüleräußerungen, bei der das Projekt neue Erkenntnisse geliefert hat. Insbesondere hat sich ein Einfluss auf die Lehre und die Lehrerfortbildung gezeigt. Im Fall der universitären Lehre sind die Effekte sogar nachweisbar, wie wir im Rahmen einer kleinen empirischen Studie mit Lehramtsstudierenden zeigen.

Als direkte Konsequenz kann eine Lehrerfortbildung gewertet werden, die auf der Basis von Unterrichtsvideos mit Kolleginnen und Kollegen aus Deutschland und der Schweiz abgehalten wurde. Auch hier spielten die genannten Lernumgebungen eine Rolle, die im Hinblick auf die Initiierung einer stärkeren Eigentätigkeit von Schülerinnen und Schülern eingesetzt wurden.

In den für die letzte Phase geplanten Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer werden verschiedene Konzepte für den Umgang mit den Lösungsbeispielen und der Themenstudie getestet. Diese Lehrerfortbildungen werden hinsichtlich ihrer Effektivität im Rahmen des Projektes evaluiert.

## Ausgewählte Veröffentlichungen:

Reiss, K. & Thomas, J. (2000). Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. In: *Mathematica Didactica*, 23, S. 96-112.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), S. 29-35.

Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4. Utrecht: Utrecht University, pp. 97-104.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In: M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen*. Weinheim: Beltz, S. S. 51-64. (=45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik)

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differenzieller Perspektive. In: J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung*. Münster: Waxmann, S. 234-239.

Kuntze, S. & Reiss, K. (2004). Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen – Ergebnisse einer Videoanalyse. In: *Unterrichtswissenschaft*, 32(4), S. 357-379.

Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In: *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 4-6/2003. Online-Publikation: <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/03Printemps/Printemps03.html> (Stand: 26.01.05)